

CONSTRUCCIÓN DE UNA TARIFA DE CUBICACIÓN CON CLASIFICACIÓN DE PRODUCTOS PARA *Pinus radiata* D. Don EN GALICIA BASADA EN UNA FUNCIÓN DE PERFIL DEL TRONCO

F. CASTEDO DORADO, J. G. ÁLVAREZ GONZÁLEZ

Dpto. de Ingeniería Agroforestal. Escuela Politécnica Superior de Lugo.
Universidad de Santiago de Compostela. Campus Universitario. 27002 Lugo. España
castedo@lugo.usc.es

RESUMEN

Un total de 17 funciones de perfil del tronco pertenecientes a seis categorías de modelos distintos (polinómicos simples, polinómicos segmentados, potenciales, exponenciales, de exponente variable y trigonométricos) se han ajustado a los datos de diámetros medidos a diferentes alturas obtenidos de una muestra de 280 árboles de *Pinus radiata* D. Don en Galicia. Las ecuaciones obtenidas se han comparado y validado empleando una muestra independiente de 85 árboles, con el fin de determinar el modelo que mejor se adapta al perfil real del tronco para la especie en esta Comunidad Autónoma. Posteriormente se ha construido una tarifa de cubicación con clasificación de productos mediante integración de la mejor función de perfil. Esta tarifa permite la estimación del volumen del árbol correspondiente a los distintos destinos industriales de la madera y por tanto una mejor valoración económica de la producción de las masas de esta especie.

PALABRAS CLAVE: *Pinus radiata*
Funciones de perfil
Tarifas de cubicación con clasificación de productos

INTRODUCCIÓN

El pino insigne o pino de Monterrey (*Pinus radiata*) es la conífera exótica más utilizada en repoblaciones en España y especialmente en la Cornisa Cantábrica. En Galicia se estima que existen en la actualidad entre 60.000 y 70.000 ha de esta especie (Sánchez *et al.*, 1997), observándose, además, un notable aumento de su utilización en repoblaciones debido a su rápido crecimiento y a su turno moderado.

Recibido: 16-12-99
Aceptado para su publicación: 19-9-00

A pesar de su importancia son muy escasos en España, y más aún en Galicia, los estudios relacionados con el crecimiento y la producción de esta especie. Estas carencias hacen necesario el desarrollo de herramientas de gestión modernas basadas en modelos que relacionen las variables que definen una masa o un árbol individual.

Uno de estos modelos son las tarifas de cubicación con clasificación de productos, que son ecuaciones que permiten estimar el volumen de los árboles y, por tanto, de las masas, para los diferentes destinos de la madera cuando las dimensiones (diámetros y longitudes) marcan dichos destinos.

Dos son las metodologías más comunes para la obtención de las tarifas de cubicación con clasificación de productos (Byrne y Reed, 1986; Rustagi y Loveless, 1991): una se basa en el ajuste de ecuaciones de volumen porcentual, que estiman el volumen de un árbol hasta un cierto diámetro o altura como un porcentaje del volumen total del mismo (Burkhart, 1977; Clutter, 1980; Cao *et al.*, 1980; Reed y Green, 1984) y la otra consiste en ajustar una ecuación que caracterice el perfil del tronco del árbol. Estas ecuaciones se denominan funciones de perfil y son relaciones matemáticas entre los diámetros o secciones del tronco en cualquier punto del mismo y la altura a la que se encuentran.

En el presente trabajo se analiza el comportamiento de algunas de las funciones de perfil más utilizadas y se construye, a partir de ellas, una tarifa de cubicación con clasificación de productos para *Pinus radiata* en Galicia.

MATERIAL Y MÉTODOS

Datos utilizados

Los datos empleados en este trabajo provienen de una muestra de 365 árboles extraídos de masas regulares de *Pinus radiata* con edades comprendidas entre 5 y 41 años. Se seleccionaron 61 masas distribuidas por toda Galicia tratando de cubrir las diferentes calidades de estación y de modo que, en la muestra final de árboles medidos, estuviesen adecuadamente representadas las principales combinaciones de diámetros normales y alturas. Dentro de cada masa se eligieron los pies proporcionalmente a la distribución diamétrica de la misma; cada árbol fue apeado y dividido en trozas de longitud comprendida entre 1 y 2,5 m, siendo en su mayoría de 1 m de longitud.

En cada troza se midió la longitud con cinta métrica y aproximación al centímetro, el diámetro basal en cruz con forcípula milimétrica y el espesor de corteza radial en milímetros. Asimismo se midieron el diámetro normal y el diámetro a 4 m en cruz, ambos en milímetros, la altura total con cinta métrica centimétrica y, por último, se estimaron los volúmenes totales con y sin corteza cubicando cada troza mediante la fórmula de Smalian. En total se obtuvieron 4.997 pares de datos diámetro con corteza (d) a una cierta altura (h).

La muestra de árboles fue dividida en dos subconjuntos de forma aleatoria. El primero de ellos estaba formado aproximadamente por el 75 % del total (280 pies y 3.835 pares diámetro-altura) y se utilizó para realizar el ajuste de las funciones de perfil analizadas. Los árboles restantes (85 pies y 1.162 pares diámetro-altura) se consideraron como una muestra independiente y se emplearon en la fase de validación de los modelos que mejores características presentaban en los ajustes previos.

En la Tabla 1 se presentan los valores medio, máximo y mínimo, así como la desviación típica de las principales variables dendrométricas y dasométricas del total de la muestra y de cada uno de los subconjuntos en que fue dividida.

TABLA 1
CARACTERÍSTICAS DE LOS DATOS DE AJUSTE Y VALIDACIÓN
Characteristics of the fit and validation data

Variable	Muestra total (N = 365)				Submuestra para ajuste (N = 280)				Submuestra para validación (N = 85)			
	Media	Desv. Típica	Máximo	Mínimo	Media	Desv. Típica	Máximo	Mínimo	Media	Desv. Típica	Máximo	Mínimo
D (cm)	29,37	13,08	60,00	5,10	30,49	13,66	57,30	7,15	29,03	12,90	60,00	5,10
H (m)	20,43	6,69	36,49	4,29	21,24	6,84	34,80	6,95	20,18	6,64	36,49	4,24
D/H	1,41	0,36	2,69	0,36	1,41	0,39	2,69	0,67	1,42	0,35	2,61	0,67
V (dm³)	866,57	851,67	4.319,09	6,08	965,11	917,25	4.139,09	20,29	836,66	830,16	4.319,09	6,08
Edad (años)	23	9	41	5	23	9	41	5	23	9	41	5
Calidad*	19,90	3,37	25,60	11,20	19,90	3,37	25,60	11,20	19,90	3,37	25,60	11,20
N.º pies/ha	991,57	539,42	3.088	216	991,57	539,42	3.088	216	991,57	539,42	3.088	216

* La calidad viene dada por el Índice de Sitio, que para *Pinus radiata* en Galicia se define como la altura dominante de la masa, en metros, a una edad típica de 20 años (Sánchez *et al.*, 1998).

The quality is given by the Site Index, which for Pinus radiata in Galicia is defined as the dominant height of the stand, in meters, at the age of 20 years (Sánchez et al., 1998).

Nomenclatura empleada

La terminología empleada en la descripción de los modelos utilizados es la siguiente:

d = diámetro con corteza correspondiente a la altura h (en cm).

r = radio con corteza correspondiente a la altura h (en cm).

D = diámetro normal con corteza (en cm).

h = altura en metros desde la base del árbol hasta el punto donde se alcanza el diámetro d .

H = altura total del árbol (en m).

a_i, b_i, c = coeficientes de regresión a determinar mediante el ajuste.

V_m = volumen maderable con corteza del árbol (m^3). Esta variable se ha estimado para cada pie a partir de las tarifas provinciales para *Pinus radiata* del Segundo Inventario Forestal Nacional (ICONA, 1993).

$K = \frac{\pi}{40.000}$ es una constante para transformar diámetros cuadrados en secciones.

$$X = \frac{H-h}{H-1,30}$$

$$T = \frac{h}{H}$$

$$Z = \left(\frac{H-h}{H} \right)$$

$p = 100 \cdot \frac{h_i}{H}$, donde h_i es la altura en metros, medida desde la base del árbol, a la cual se

encuentra el primer punto de inflexión teórico de la curva de perfil del tronco. Según diferentes autores esta transición se produce en una zona comprendida entre un 20 % (Vallejos *et al.*, 1998) y un 25 % (Demaerschalk y Kozak, 1977) de la altura total del árbol.

Modelos analizados

Se han utilizado 17 modelos diferentes que, por sus características, se han agrupado en las siguientes seis categorías:

1. Modelos polinómicos simples
 2. Modelos polinómicos segmentados
 3. Modelos potenciales
 4. Modelos exponenciales
 5. Modelos de exponente variable
 6. Modelos trigonométricos
1. *Modelos polinómicos simples*: se encuadran en esta categoría todos aquellos en los que el diámetro relativo (cociente entre el diámetro a la altura h y el diámetro normal) o su cuadrado se estima a partir de la altura relativa (cociente entre la altura h y la altura total) mediante una única función polinómica válida para todo el tronco del árbol. De entre ellos se seleccionaron los modelos propuestos por

- Bruce *et al.* (1968), Kozak (1969), Kozak *et al.* (1969), Goulding y Murray (1976) y una modificación de este último propuesta por los autores de este trabajo. Las expresiones matemáticas de cada uno de ellos aparecen en la Tabla 2.
2. *Modelos polinómicos segmentados*: este grupo incluye todos los modelos en los que la función $d = f(h)$ se obtiene por la unión de varias funciones polinómicas a lo largo del perfil, imponiendo condiciones de continuidad de la curva y sus dos primeras derivadas. Los modelos de este tipo analizados (Tabla 2) fueron los propuestos por Max y Burkhart (1976), Cao *et al.* (1980) y Parresol *et al.* (1987).
 3. *Modelos potenciales*: en estos modelos el diámetro relativo es función de la altura o de la altura relativa elevada a un cierto parámetro constante. Son modelos geoméricamente muy simples (Czaplewski y McClure, 1988) y cuya principal ventaja radica en el hecho de que las ecuaciones de volumen obtenidas mediante su integración son analíticamente compatibles con las tarifas de cubicación clásicas. Se han analizado los siguientes: Demaerschalk (1972, 1973), Ormerod (1973), Forslund (1990) y Newnham (1990) (Tabla 2).
 4. *Modelos exponenciales*: se caracterizan porque la función incluye términos exponenciales en los que está incluida la variable independiente h . Se ha utilizado un único modelo de este grupo, el propuesto por Riemer *et al.* (1995) (Tabla 2).
 5. *Modelos de exponente variable*: su base es la misma que la de los potenciales, con la salvedad de que el exponente varía a medida que cambia la altura del tronco analizada, es decir, el exponente es, en sí mismo, una función de la altura (Forslund, 1990). Se analizaron los modelos de Kozak (1988) y Newnham (1988); en la Tabla 2 figuran sus expresiones matemáticas.
 6. *Modelos trigonométricos*: están basados en el empleo de funciones trigonométricas. La ecuación de este grupo utilizada (Tabla 2) es la más representativa de este tipo de modelos y fue propuesta por Thomas y Parresol (1991). Esta función presenta el inconveniente de no estar definida cuando la altura es igual a cero, es decir, en la estimación del diámetro en la base.

Metodología de ajuste y validación

La mayoría de los modelos descritos anteriormente son lineales en los parámetros o fácilmente linealizables mediante el empleo de logaritmos por lo que su ajuste se ha realizado por mínimos cuadrados ordinarios empleando el procedimiento REG del programa estadístico SAS/STAT™ (SAS, 1990).

El uso de logaritmos en la linealización de algunos de los modelos implica que no pueden utilizarse en el ajuste los pares de valores diámetro-altura que corresponden a la altura total del árbol, al ser el diámetro igual a cero, sin embargo, los modelos afectados por esta modificación presentan como restricción en sus expresiones que cuando la altura de referencia h es igual a la altura total H , el valor del diámetro sea cero.

El modelo de Kozak (1988), al contar con un elevado número de variables independientes, podía presentar problemas de multicolinealidad, por lo que el ajuste de mínimos cuadrados se realizó paso a paso («Stepwise»).

Los modelos de los grupos 2, 4 y 6 (polinómicos segmentados, exponenciales y trigonométricos) y los modelos de Demaerschalk (1973) y Forslund (1990), ambos del grupo 3 (potenciales), no son lineales en los parámetros, por lo que su ajuste se ha llevado a cabo empleando el procedimiento NLIN del mismo programa estadístico, utilizando el método

TABLA 2
FUNCIONES DE PERFIL ANALIZADAS
Taper functions evaluated

Modelo	Expresión
Bruce <i>et al.</i> (1968) (1.1)	$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = \left(\frac{b_1 \cdot X^{1.5}}{10}\right) + \left(\frac{b_2 \cdot (X^{1.5} - X^3) \cdot D}{10^2}\right) + \left(\frac{b_3 \cdot (X^{1.5} - X^3) \cdot H}{10^3}\right) + \left(\frac{b_4 \cdot (X^{1.5} - X^3) \cdot H \cdot D}{10^5}\right) + \left(\frac{b_5 \cdot (X^{1.5} - X^3) \cdot H^{0.5}}{10^3}\right) + \left(\frac{b_6 \cdot (X^{1.5} - X^{10}) \cdot H^2}{10^5}\right)$
Kozak (1969) (1.2)	$\left(\frac{d}{D}\right) = b_1 \cdot (T-1) + b_2 \cdot (T^2-1)$
Kozak <i>et al.</i> (1969) (1.3)	$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = b_0 + b_1 \cdot \left(\frac{h}{H}\right) + b_2 \cdot \left(\frac{h}{H}\right)^2$
Goulding y Murray (1976) (1.4)	$\frac{d^2 \cdot K \cdot H}{V_m} - 2 \cdot Z = [b_1(3 \cdot Z^2 - 2 \cdot Z) + b_2 \cdot (4 \cdot Z^3 - 2 \cdot Z) + b_3 \cdot (5 \cdot Z^4 - 2 \cdot Z) + b_4 \cdot (6 \cdot Z^5 - 2 \cdot Z)]$
Goulding y Murray modificado (1.5)	$\frac{d^2 \cdot K \cdot H}{V_m} = [b_0 \cdot 2 \cdot Z + b_1 \cdot (3 \cdot Z^2 - 2 \cdot Z) + b_2 \cdot (4 \cdot Z^3 - 2 \cdot Z) + b_3 \cdot (5 \cdot Z^4 - 2 \cdot Z) + b_4 \cdot (6 \cdot Z^5 - 2 \cdot Z)]$
Max y Burkhart (1976) (2.1)	$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = b_1 \cdot \left(\frac{h}{H} - 1\right) + b_2 \cdot \left(\frac{h^2}{H^2} - 1\right) + b_3 \cdot \left(a_1 - \frac{h}{H}\right)^2 + b_4 \cdot \left(a_2 - \frac{h}{H}\right)^2 + I_2$
Cao <i>et al.</i> (1980) (2.2)	$\left(\frac{d^2 \cdot K \cdot H}{V_m} - 2Z\right) = b_1 \cdot (3Z^2 - 2Z) + b_2 \cdot (Z - a_1)^2 + b_3 \cdot (Z - a_2)^2 + I_2$
Parresol <i>et al.</i> (1987) (2.3)	$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = Z^2(b_1 + b_2 \cdot Z) + (Z - a)^2 \cdot [b_3 + b_4 \cdot (Z + 2a)] + I$
Demaerschalk (1972) (3.1)	$d = b_1 \cdot D^{b_2} \cdot (H-h)^{b_3} \cdot H^{b_4}$
Demaerschalk (1973) (3.2)	$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = b_1 \cdot \left(\frac{1}{D^2 \cdot H}\right) \cdot \left(\frac{H-h}{H}\right)^{b_2} + b_3 \cdot \left(\frac{H-h}{H}\right)^{b_4}$
Ormerod (1973) (3.3)	$\frac{d}{D} = \left(\frac{H-h}{H-1.30}\right)^{b_1}$
Forslund (1990) (3.4)	$\frac{d}{D} = (1 - T^{b_1})^{b_2}$
Newnham (1990) (3.5)	$\frac{d}{D} = b_1 \cdot \left(\frac{H-h}{H-1.30}\right)^{b_2}$
Riemer <i>et al.</i> (1995) (4.1)	$r = \frac{b_0 \cdot D}{1 - e^{b_2 \cdot 0.3 - H}} + \left(\frac{D}{2} - b_0 \cdot D\right) \cdot \left[1 - \frac{1}{1 - e^{b_1 \cdot 0.3 - H}}\right] + e^{-b_1 \cdot h} \cdot \left[\frac{D - b_0 \cdot D}{1 - e^{b_1 \cdot 0.3 - H}}\right] \cdot e^{1.3 \cdot b_1} - e^{b_2 \cdot h} \cdot \left[\frac{b_0 \cdot D \cdot e^{-b_2 H}}{1 - e^{b_2 \cdot 0.3 - H}}\right]$
Kozak (1988) (5.1)	$d = b_0 \cdot D^{b_1} \cdot b_2^p \cdot \left[\frac{1 - \sqrt{T}}{1 - \sqrt{P}}\right]^{[b_3 + b_4 \cdot T + b_5 \cdot T^2 + b_6 \cdot \text{Ln}(T+0.001) + b_7 \cdot \sqrt{T} + b_8 \cdot e^T + b_9 \cdot \left(\frac{D}{H}\right)]}$
Newnham (1988) (5.2)	$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{T}}{1 - \sqrt{P}}\right)^{[b_1 + b_2 \cdot X + b_3 \cdot \left(\frac{d}{H}\right)^2 + b_4 \cdot X^2 \cdot \left(\frac{D}{H}\right)^{b_5} + b_6 \cdot \sqrt{T} + b_7 \cdot D \cdot T]}$
Thomas y Parresol (1991) (6.1)	$\frac{d}{D} = X^I$ $\left(\frac{d}{D}\right)^2 = b_1 \cdot (T-1) + b_2 \cdot \text{sen}(c \cdot \pi \cdot T) + b_3 \cdot \cot\left(\frac{\pi \cdot T}{2}\right)$

iterativo DUD (Don't Use Derivatives) propuesto por Ralston y Jenrich (1978). Se utilizaron como valores de partida de los parámetros para iniciar la iteración los obtenidos por otros autores en trabajos de similares características.

La comparación de las estimaciones de los modelos se ha basado, tanto en la fase de ajuste como en la de validación, en el análisis gráfico de los residuos (E_i) y en el estudio de cuatro estadísticos obtenidos a partir de ellos: por una parte el sesgo (\bar{E}), que evalúa la desviación del modelo con respecto a los valores observados, y por otra parte el error medio cuadrático (EMC), la desviación estándar de los residuos (S) y la media de los valores absolutos de los residuos ($|\bar{E}|$), que analizan la precisión de las estimaciones. Las comparaciones en la fase de validación se han completado con la inclusión de un nuevo estadístico de precisión, la eficiencia del modelo (MEF). Por último, con el fin de determinar el comportamiento de cada modelo a lo largo del tronco del árbol, se han calculado los valores del sesgo y error medio cuadrático en intervalos de altura relativa de un 10 % de tamaño.

Las expresiones de los estadísticos comentados anteriormente son las siguientes:

$$\text{Sesgo } (\bar{E}): \bar{E} = \frac{\sum_{i=1}^N E_i}{N}$$

$$\text{Error medio cuadrático (EMC): EMC} = \frac{\sum_{i=1}^N (E_i)^2}{N-q-1}$$

$$\text{Desviación estándar de los residuos (S): } S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (E_i - \bar{E})^2}{N-1}}$$

$$\text{Media de los valores absolutos de los residuos } (|\bar{E}|): |\bar{E}| = \frac{\sum_{i=1}^N |E_i|}{N}$$

$$\text{Eficiencia del modelo (MEF): MEF} = \frac{\sum_{i=1}^N (E_i)^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}$$

Siendo:

N = número de datos usados en el ajuste del modelo

q = número de parámetros del modelo

$E_i = Y_i - \hat{Y}_i$

Y_i , \hat{Y}_i e \bar{Y}_i son, respectivamente, el valor observado, predicho y promedio de $\left(\frac{d}{D}\right)^2$

Se ha escogido como variable dependiente el cuadrado del diámetro relativo por la importancia que este valor tiene para la obtención de tarifas de cubicación mediante la integración de las funciones de perfil.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Fase de ajuste

La Tabla 3 muestra los valores de los parámetros estimados por regresión para cada uno de los modelos ajustados. Los análisis gráficos de residuos sólo han mostrado una falta notoria de homogeneidad de varianzas en el ajuste del modelo de Newnham (1988), en el resto de los casos no se observan tendencias que indiquen un incumplimiento de las hipótesis de partida.

La Tabla 4 presenta los valores de los estadísticos de comparación obtenidos para cada una de las ecuaciones considerando la totalidad del tronco. Se incluyen también los valores del coeficiente de determinación (R^2) que, si bien no sirve como estadístico comparativo entre modelos (el número de datos utilizados no es el mismo en todos los casos), sí da una idea de la calidad del ajuste. Analizando los resultados por grupos de ecuaciones se observa que los modelos de exponente variable, el modelo exponencial y el modelo trigonométrico presentan los mejores comportamientos, mientras que las peores estimaciones se obtienen con los modelos polinómicos simples y los potenciales. Los modelos polinómicos segmentados muestran un comportamiento irregular, con buenas estimaciones en el caso de las funciones de Max y Burkhart y Parresol *et al.* y un sesgo muy elevado en el caso del modelo de Cao *et al.*

El modelo que presenta los mejores estadísticos de ajuste es el de exponente variable de Newnham, sin embargo, como se comentó anteriormente, el análisis gráfico de la distribución de los residuos muestra una clara falta de homogeneidad de varianzas.

Fase de validación

De los 17 modelos ajustados se han seleccionado aquellos que estiman de forma más precisa y menos sesgada el perfil de la muestra de árboles utilizados, basando la elección en los valores de los estadísticos y en el análisis de residuos. En total se han seleccionado para la fase de validación 11 modelos: los polinómicos simples de Bruce *et al.*, Kozak y Kozak *et al.*, los polinómicos segmentados de Max y Burkhart y Parresol *et al.*, los dos modelos potenciales de Demaerschalk, el modelo exponencial de Riemer *et al.*, los de exponente variable de Kozak y Newnham y el trigonométrico de Thomas y Parresol. Se ha incluido el modelo de exponente variable de Newnham por ser el de menor sesgo y mayor precisión en la fase de ajuste (Tabla 4), a pesar de la heterogeneidad de varianzas.

En la Tabla 5 aparecen reflejados los valores de los estadísticos obtenidos para la nueva muestra de árboles. Todos los modelos presentan un comportamiento análogo al de la fase de ajuste a excepción del de Newnham, para el que se incrementan de forma notable todos los valores, particularmente el sesgo y el error medio cuadrático (1.000 y 3.000 % respectivamente).

Los valores de la Tabla muestran, además, que las funciones polinómicas segmentadas de Max y Burkhart y Parresol *et al.* junto con el modelo exponencial de Riemer *et al.*, el modelo de exponente variable de Kozak y la función trigonométrica de Thomas y Parresol superan claramente en exactitud global a los restantes modelos. Las Figuras 1 y 2 muestran la tendencia del sesgo (\bar{E}) y error medio cuadrático (EMC) de estos cinco modelos a lo largo del tronco en intervalos de altura relativa de un 10 % de tamaño.

TABLA 3
VALORES DE LOS PARÁMETROS ESTIMADOS MEDIANTE EL ANÁLISIS DE REGRESIÓN
Regression coefficients of taper equations

Modelo	b ₀	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	a ₁	a ₂	c	p
(1.1)	—	1,01676	0,01165	-0,02254	-0,00007	0,00325	-0,00001	—	—	—	—	—	—	—
(1.2)	—	-2,42933	1,17502	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
(1.3)	1,26466	-2,53619	1,31611	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
(1.4)	-1,61849	10,56408	-14,85954	6,68765	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
(1.5)	1,08313	-3,85254	14,36730	-17,90923	7,59973	—	—	—	—	—	—	—	—	—
(2.1)	—	-3,04638	1,41345	144,29658	-0,90888	—	—	—	—	—	0,06093	0,82023	—	—
(2.2)	—	-1,32059	272,38490	9,33329	—	—	—	—	—	—	0,86446	0,00015	—	—
(2.3)	—	2,02603	-1,08956	-919,2921	348,20002	—	—	—	—	—	0,88440	—	—	—
(3.1)	—	1,26331	0,85735	0,80034	-0,69998	—	—	—	—	—	—	—	—	—
(3.2)	—	107,20452	0,51597	1,26094	2,08957	—	—	—	—	—	—	—	—	—
(3.3)	—	0,80156	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
(3.4)	—	1,07196	1,29054	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
(3.5)	—	1,00277	0,80332	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
(4.1)	0,45034	0,76913	0,05076	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
(5.1)	1,36728	0,79769	1,00583	6,35359	4,32687	5,75044	—	—	-5,85035	0,10927	—	—	—	0,2
(5.2)	—	4,65569	-2,70647	0,06803	-0,18932	-4,83002	-0,00562	—	—	—	—	—	—	—
(6.1)	—	-0,72006	0,05855	0,02627	—	—	—	—	—	—	—	—	1,98104	—

TABLA 4
VALORES DE LOS ESTADÍSTICOS EN LA FASE DE AJUSTE PARA EL
CONJUNTO DEL TRONCO

Statistics of fit for the entire stem of the fit data

Modelo		EMC	\bar{E}	S	$ \bar{E} $	R ²
Bruce <i>et al.</i> (1968)	(1.1)	0,0121260	0,0023272	0,1100084	0,0587941	0,9373
Kozak (1969)	(1.2)	0,0203091	0,0067424	0,1423131	0,0843266	0,8949
Kozak <i>et al.</i> (1969)	(1.3)	0,0200082	-0,0000002	0,1414134	0,0878463	0,8964
Goulding y Murray (1976)	(1.4)	0,1122497	0,0040683	0,3348373	0,0912858	0,4192
Goulding y Murray modificado	(1.5)	0,1190423	-0,0265894	0,3437731	0,0864436	0,3843
Max y Burkhart (1976)	(2.1)	0,0104572	-0,0000830	0,1021743	0,0616471	0,9447
Cao <i>et al.</i> (1980)	(2.2)	0,1318870	-0,0318247	0,3615078	0,0942132	0,3096
Parresol <i>et al.</i> (1987)	(2.3)	0,0107039	0,0067619	0,1031654	0,0623530	0,9435
Demaerschalk (1972)	(3.1)	0,0236755	0,0141914	0,1531472	0,0927088	0,8749
Demaerschalk (1973)	(3.2)	0,0206242	0,0162717	0,1426047	0,0940841	0,8910
Ormerod (1973)	(3.3)	0,0234529	0,0176306	0,1521032	0,0918569	0,8760
Forslund (1990)	(3.4)	0,0341455	0,0465291	0,1787756	0,0888876	0,8195
Newnham (1990)	(3.5)	0,0231877	0,0141826	0,1459009	0,0711420	0,8887
Riemer <i>et al.</i> (1995)	(4.1)	0,0089303	0,0014934	0,0932750	0,0497412	0,9538
Kozak (1988)	(5.1)	0,0095435	0,0050351	0,0974650	0,0552779	0,9379
Newnham (1988)	(5.2)	0,0035661	-0,0010065	0,0596583	0,0417596	0,9524
Thomas y Parresol (1991)*	(6.1)	0,0044804	-0,0016517	0,0668871	0,0449294	0,9763

* No se han incluido en los cálculos de estos valores las estimaciones correspondientes a la base del tronco por no estar definida la función en este punto.

This statistics were calculated without including the estimated values at the bottom of stem because the function is not defined.

TABLA 5
VALORES DE LOS ESTADÍSTICOS EN LA FASE DE VALIDACIÓN PARA
EL CONJUNTO DEL TRONCO

Validation statistic of fit for the entire stem

Modelo		EMC	\bar{E}	S	$ \bar{E} $	MEF
Bruce <i>et al.</i> (1968)	(1.1)	0,0253245	-0,0011809	0,1587204	0,0833050	0,1261276
Kozak (1969)	(1.2)	0,0212884	0,0074960	0,1455868	0,0882247	0,1063934
Kozak <i>et al.</i> (1969)	(1.3)	0,2092703	0,0004733	0,1445363	0,0919345	0,1045873
Max y Burkhart (1976)	(2.1)	0,0084017	0,0027671	0,0913821	0,0576122	0,0418448
Parresol <i>et al.</i> (1987)	(2.3)	0,0087857	0,0088199	0,0931129	0,0585446	0,0198888
Demaerschalk (1972)	(3.1)	0,0239625	0,0152533	0,1538432	0,0809080	0,1196546
Demaerschalk (1973)	(3.2)	0,0199517	0,0165889	0,1400479	0,0909505	0,0995704
Riemer <i>et al.</i> (1995)	(4.1)	0,0084751	0,0019152	0,0899227	0,0507376	0,0423195
Kozak (1988)	(5.1)	0,0080171	0,0064510	0,0890340	0,0505909	0,0398940
Newnham (1988)	(5.2)	0,0288296	-0,0286125	0,1669912	0,0701954	0,1437092
Thomas y Parresol (1991)*	(6.1)	0,0043025	-0,0019245	0,0654434	0,0463387	0,0437948

* No se han incluido en los cálculos de estos valores las estimaciones correspondientes a la base del tronco por no estar definida la función en este punto.

This statistics were calculated without including the estimated values at the bottom of stem because the function is not defined.

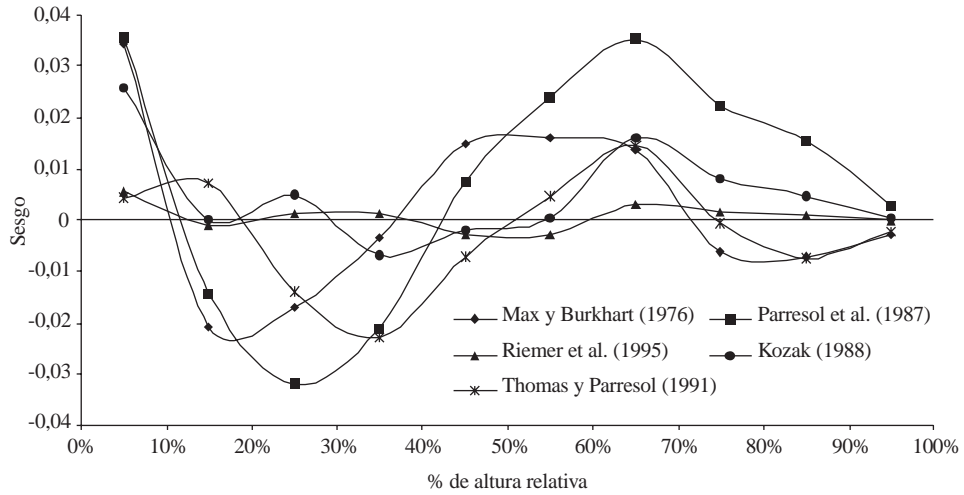


Fig. 1.—Tendencia del sesgo (E) a lo largo del tronco para intervalos de altura relativa de un 10 %
Tendency of bias (E) for 10 % relative heights intervals along the stem

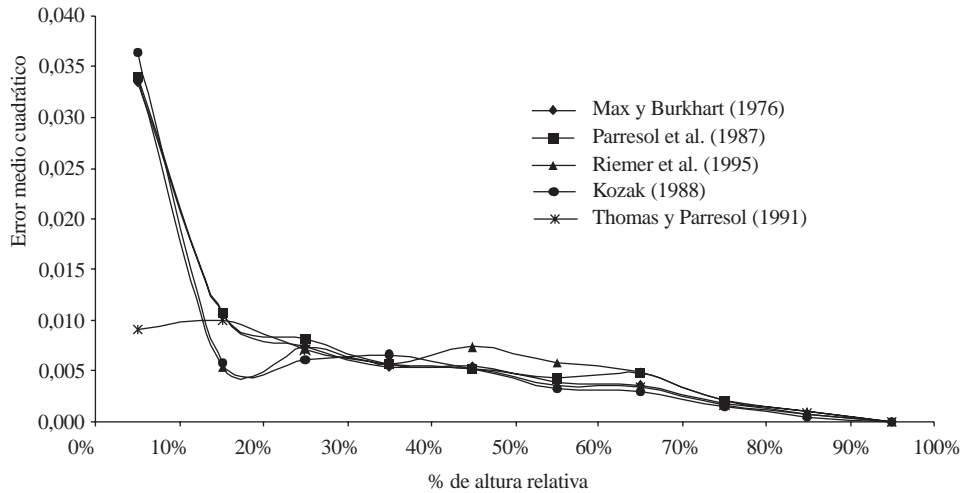


Fig. 2.—Tendencia del error medio cuadrático (EMC) a lo largo del tronco para intervalos de altura relativa de un 10 %
Tendency of mean square error (EMC) for 10 % relative heights intervals along the stem

Desde un punto de vista económico, la parte más importante del tronco es la comprendida dentro del primer tercio de la altura total del árbol; partiendo de esta idea, si se observan las tendencias de las curvas de sesgo y error medio cuadrático de los diferentes modelos se aprecia que, en todos ellos, las estimaciones de diámetro en dicho intervalo son bastante precisas, destacando el aspecto de la curva correspondiente al sesgo del modelo exponencial de Riemer *et al.*

Es necesario subrayar que los valores de los estadísticos obtenidos para el modelo de Thomas y Parresol (1991) en el primer intervalo están subestimados, puesto que la función no está definida en la base. Este hecho, unido a que en el extremo superior del tronco predice diámetros ligeramente negativos, ha aconsejado no emplearlo para la construcción de la tarifa de cubicación con clasificación de productos.

El modelo de Kozak (1988) muestra unos estadísticos de ajuste y validación que se encuentran entre los mejores de todos los analizados, tanto para el conjunto de todo el árbol como para las distintas alturas relativas, por lo que puede considerarse como uno de los modelos más completos. La explicación puede encontrarse, en parte, en la inclusión dentro del modelo de la variable D/H: según algunos autores (Newnham, 1992; Muhairwe *et al.*, 1994), esta variable está claramente relacionada con la longitud y la ratio de copa, sobre todo en coníferas, características del árbol que influyen en gran manera en el perfil de su tronco.

El modelo exponencial de Riemer *et al.* (1995), por su parte, presenta valores de estadísticos de igual orden que los de Kozak (1988), pudiéndose considerar equiparable a éste en cuanto a capacidad estimadora.

Los modelos polinómicos segmentados de Max y Burkhart (1976) y Parresol *et al.* (1987), a pesar de presentar unos estadísticos de ajuste y validación ligeramente peores que los dos anteriormente descritos, son modelos a tener en cuenta por sus buenas características.

Tarifa de cubicación con clasificación de productos

La construcción de la tarifa de cubicación con clasificación de productos se ha llevado a cabo a partir del modelo exponencial de Riemer *et al.* (1995), puesto que aunque su capacidad estimadora es similar a la del modelo de Kozak (1988), este último no puede integrarse analíticamente.

Se parte, por tanto, de la función de perfil siguiente:

$$r = \frac{b_0 \cdot D}{1 - e^{b_2 \cdot (1,3-H)}} + \left(\frac{D}{2} - b_0 \cdot D \right) \cdot \left[1 - \frac{1}{1 - e^{b_1 \cdot (1,3-H)}} \right] + e^{-b_1 \cdot h} \cdot \left[\frac{\left(\frac{D}{2} - b_0 \cdot D \right) \cdot e^{1,3 \cdot b_1}}{1 - e^{b_1 \cdot (1,3-H)}} \right] - e^{b_2 \cdot h} \cdot \left[\frac{b_0 \cdot D \cdot e^{-b_2 H}}{1 - e^{b_2 \cdot (1,3-H)}} \right] \quad [1]$$

donde el valor de los parámetros b_i aparece en la Tabla 3 y el significado de las restantes variables es el comentado en el apartado de nomenclatura.

Integrando la ecuación [1] alrededor del eje de alturas para estimar el volumen del sólido de revolución se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 F(h) &= \int \pi r^2(h) dh = \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \left(u^2 h - \frac{v^2}{2 \cdot b_1} \cdot e^{-2 \cdot b_1 \cdot h} + \frac{w^2}{2 \cdot b_2} \cdot e^{2 \cdot b_2 \cdot h} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2 \cdot u \cdot v}{b_1} \cdot e^{-b_1 \cdot h} - \frac{2 \cdot u \cdot w}{b_2} \cdot e^{b_2 \cdot h} + \frac{2 \cdot v \cdot w}{b_1 - b_2} \cdot e^{(b_2 - b_1) \cdot h} \right) \quad [2]
 \end{aligned}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{b_0 \cdot D}{1 - e^{b_2 \cdot (1,3-H)}} + \left(\frac{D}{2} - b_0 \cdot D \right) \cdot \left[1 - \frac{1}{1 - e^{b_1 \cdot (1,3-H)}} \right] \\
 v &= \frac{\left(\frac{D}{2} - b_0 \cdot D \right) \cdot e^{1,3 \cdot b_1}}{1 - e^{b_1 \cdot (1,3-H)}} \\
 w &= \frac{b_0 \cdot D \cdot e^{(-b_2 \cdot H)}}{1 - e^{b_2 \cdot (1,3-H)}}
 \end{aligned}$$

El volumen del árbol (V) entre dos alturas h_1 y h_2 se obtiene a partir de la ecuación [2] por la siguiente expresión $V = F(h_2) - F(h_1)$. El inconveniente de esta función es que no tiene inversa generalizada, por lo que para determinar volúmenes hasta un cierto diámetro en punta delgada será necesario estimar la altura a la que se alcanza dicho diámetro mediante procedimientos iterativos de determinación de raíces.

CONCLUSIONES

Los modelos polinómicos simples presentan la ventaja de ser lineales y por tanto sencillos de ajustar, además, las funciones primitivas son fáciles de calcular, lo que permite obtener tarifas de cubicación con clasificación de productos. Su principal desventaja radica en que estiman diámetros de forma poco precisa en la zona próxima a la base del tronco, mostrando, en general, valores inferiores a los observados. Únicamente los modelos de Bruce *et al.* (1968) y Kozak *et al.* (1969) presentan estimaciones aceptables desde el punto de vista del sesgo de los residuos y su dispersión.

Los modelos polinómicos segmentados, al emplear varias funciones [dos en el caso de Cao *et al.* (1980) y tres en los casos de Max y Burkhart (1976) y Parresol *et al.* (1987)] que se adaptan a diferentes partes del tronco, muestran, en general, una mejor aproximación del perfil real del tronco. Así, los modelos de Max y Burkhart y Parresol *et al.*, calcularon los diámetros con mucho menor sesgo que el obtenido mediante el empleo de una única función polinómica para todo el tronco. Su principal desventaja es la complejidad de sus ecuaciones, que obliga al empleo de técnicas de ajuste iterativas cuyo resultado final depende, en gran medida, de los valores de partida asignados a los parámetros, factor

que puede haber influido en las malas estimaciones que muestra el modelo de Cao *et al.* (1980). Por otro lado, la existencia de puntos de unión entre los diferentes segmentos que constituyen el polinomio conlleva complejos desarrollos matemáticos para la obtención de una tarifa de cubicación con clasificación de productos.

Los modelos potenciales son sencillos de ajustar y de integrar, sin embargo, sus estimaciones son muy sesgadas. El hecho de que las ecuaciones de volumen obtenidas mediante su integración sean compatibles con los modelos habituales de las tarifas de cubicación de dos entradas, aconseja su empleo cuando se pretenda desarrollar ecuaciones de cubicación con clasificación de productos adaptadas a las tarifas clásicas ya existentes.

Los modelos de exponente variable de Kozak (1988) y de Newnham (1988) han mostrado, en general, buenos resultados (excepción hecha de las estimaciones en la zona de la base del tronco del modelo de Newnham), similares a los mostrados en otros trabajos de idénticas características (Newnham, 1992; Vallejos *et al.*, 1998). En cambio, presentan el inconveniente de no ser integrables analíticamente ni tener función inversa generalizada, por lo que no permiten determinar el volumen entre dos alturas cualesquiera de una forma directa ni tampoco estimar a qué altura se alcanza un determinado diámetro.

El modelo trigonométrico de Thomas y Parresol (1991) presenta las ventajas de contar con un número reducido de parámetros a estimar y de ser sencillo de integrar para la obtención del volumen, sin embargo, tiene el grave inconveniente de que la función no está definida cuando la altura h es igual a 0, es decir, en la base. Este problema puede ser evitado, en parte, realizando alguna medición complementaria en el análisis de troncos entre la altura del tocón y la altura normal.

El modelo exponencial de Riemer *et al.* (1995) es el más adecuado para caracterizar el perfil del tronco de *Pinus radiata* en Galicia. A pesar de que su expresión matemática es compleja, sólo se precisa estimar tres parámetros y es sencilla de integrar. Su único inconveniente es que para estimar las alturas a las que se alcanza un determinado diámetro es necesario el empleo de procedimientos iterativos de estimación de raíces puesto que la función no tiene inversa generalizada.

AGRADECIMIENTOS

Nuestro especial agradecimiento a Javier Gorgoso, Carlos López y Federico Sánchez, investigadores de la Escuela Politécnica Superior de Lugo por su inestimable ayuda en la toma de los datos de campo. Agradecemos asimismo, la colaboración prestada por Ulises Diéguez, Carlos Lanzós y Jesús Torres.

Este trabajo ha sido financiado por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT) y la Comisión Europea, a través del proyecto 1FD97-0585-C03-03.

SUMMARY

Developing a merchantable volume equation for *Pinus radiata* D. Don in Galicia using a taper function

Seventeen taper functions from six different groups of models (single polynomial, segmented polynomial, power, exponential, variable exponent and trigonometric taper functions) were fitted to diameter at different heights data from a sample of 280 trees of *Pinus radiata* D. Don in Galicia (Northwestern Spain). The equations obtained were compared to evaluate its performance and were validated using an independent sample of 85 trees

to determine the best model. A total and merchantable volume equation was calculated by integration of the taper function. This equation is useful to estimate the yield of the stand for the different log qualities.

KEY WORDS: *Pinus radiata*
Taper functions
Merchantable volume equation

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRUCE R., CURTISS L., VAN COEVERING C., 1968. Development of a system of taper and volume tables for red alder. *For. Sci.*, 14, 339-350.
- BURKHART H., 1977. Cubic-foot volume of loblolly pine to any merchantable top limit. *South J. Appl. For.*, 1, 7-9.
- BYRNE J., REED D., 1986. Complex compatible taper and volume estimation systems for red and loblolly pine. *For. Sci.*, 32 (2), 423-443.
- CAO Q., BURKHART H., MAX T., 1980. Evaluations of two methods for cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *For. Sci.*, 26 (1), 71-80.
- CLUTTER J., 1980. Development of taper functions from a variable-top merchantable volume equations. *For. Sci.*, 26 (1), 117-120.
- CZAPLEWSKI R., McCLURE J., 1988. Conditioning a segmented stem profile model for two diameter measurements. *For. Sci.*, 34 (2), 512-522.
- DEMAERSCHALK J., KOZAK A., 1977. The whole bole system: a conditioned dual-equation system for precise prediction of tree profiles. *Can. J. For. Res.*, 7, 488-497.
- DEMAERSCHALK J., 1972. Converting volume equations to compatible taper equations. *For. Sci.*, 18 (3), 241-245.
- DEMAERSCHALK J., 1973. Integrated systems for the estimation of tree taper and volume. *Can. J. For. Res.*, 3 (1), 90-94.
- FORSLUND R., 1990. The power function as a simple stem profile examination tool. *Can. J. For. Res.*, 21, 193-198.
- GOULDING C., MURRAY J., 1976. Polynomial taper equations that are compatible with tree volume equations. *NZ. J. For. Sci.*, 5, 313-322.
- ICONA., 1993. Segundo Inventario Forestal Nacional 1986-1995: Galicia. Instituto Nacional para la Conservación de la Naturaleza. Madrid.
- KOZAK A., 1988. A variable-exponent taper equation. *Can. J. For. Res.*, 18, 1363-1368.
- KOZAK A., MUNRO D., SMITH J., 1969. Taper functions and their application in forest inventory. *For. Chro.*, 45 (4), 278-283.
- MAX T., BURKHART H., 1976. Segmented polynomial regression applied to taper equations. *For. Sci.*, 22, 283-289.
- MUHAIRWE C., LEMAY V., KOZAK A., 1993. Effects of adding tree, stand, and site variables to Kozak's variable-exponent taper equation. *Can. J. For. Res.*, 24, 252-259.
- NEWNHAM R., 1988. A variable-form taper function. *Fôrets Canada. Petawawa National Forestry Institute. Inf. Rep. PI-X-83*, 1-33.
- NEWNHAM R., 1990. Mesure du défilement de forme variable. *Fôrets Canada. Institut Forestier National de Petawawa. Rapport d'information PI-X-83-F*, 31 pp.
- NEWNHAM R., 1992. Variable-form taper functions for four Alberta tree species. *Can. J. For. Res.*, 22, 210-223.
- ORMEROD D., 1973. A simple bole model. *For. Chro.*, 49, 136-138.
- PARRESOL B., HOTVEDT J., CAO Q., 1987. A volume and taper prediction system for bald cypress. *Can. J. For. Res.*, 17, 250-259.
- RALSTON M., JENRICH R., 1978. DUD, a derivative-free algorithm for non linear least squares. *Technometrics*, 20, 7-14.
- REED D., GREEN E., 1984. Compatible stem taper and volume ratio equations. *For. Sci.*, 30 (4), 977-990.
- RIEMER T., GADOW K.v., SLODOBA B., 1995. Ein Modell zur Beschreibung von Baumschäften. *Allg. Forst-und J.- Ztg.*, 166 (7), 144-147.
- RUSTAGI R., LOVELESS R., 1991. Compatible variable-form volume and stem profile equations for Douglas-fir. *Can. J. For. Res.*, 21, 143-151.

- SÁNCHEZ F., RODRÍGUEZ R., ROJO A., 1997. Primeros datos de crecimiento y producción de pinares de *Pinus radiata* D. Don en montes gestionados por la Administración en la zona central de la provincia de Lugo. II Congreso Forestal Español. Irati, 1997. Volumen IV, 487-492.
- SÁNCHEZ F., RODRÍGUEZ R., ROJO A., ÁLVAREZ J., 1998. Resultados preliminares del estudio de curvas de calidad de estación y de los factores ecológicos implicados en la productividad de *Pinus radiata* D. Don en Galicia (España). Actas del Primer Congreso Latinoamericano IUFRO: «El manejo sustentable de los recursos forestales, desafío del siglo XXI». Valdivia (Chile), 22 al 28 de noviembre de 1998.
- SAS/STAT™, 1990. User's guide, Version 6, Fourth Edition. SAS Institute Inc., Cary, NC, USA.
- THOMAS C., PARRESOL B., 1991. Simple, flexible, trigonometric taper equations. Can. J. For. Res., 21, 1132-1137.
- VALLEJOS O., MENDOZA M., ROJAS M., 1998. Función de ahusamiento para *Eucalyptus delegatensis* R. T. Baker. Fundo El Picazo, VII Región, Chile. Actas del Primer Congreso Latinoamericano IUFRO: «El manejo sustentable de los recursos forestales, desafío del siglo XXI». Valdivia (Chile), 22 al 28 de noviembre de 1998.