

Modelización de la relación altura-diámetro para *Pinus pinaster* Ait. en Galicia mediante la función de densidad bivalente S_{BB}

F. Castedo Dorado, A.D. Ruiz González, J.G. Álvarez González *

Dpto. de Ingeniería Agroforestal. Escuela Politécnica Superior de Lugo. Universidad de Santiago de Compostela. Campus Universitario. 27002 Lugo. España

algonjg@lugo.usc.es

RESUMEN

Se ha ajustado la función de densidad bivalente S_{BB} a datos de altura y diámetro de una muestra de pies de pino marítimo (*Pinus pinaster* Ait.) pertenecientes a 24 parcelas de ensayo instaladas en masas regulares de dicha especie y repartidas por toda la Comunidad Autónoma de Galicia.

Utilizando una propiedad de la distribución bivalente S_{BB} se ha estimado la relación altura-diámetro en pino pinaster. Para ello se realizó un ajuste por regresión de medianas de la función S_{BB} entre los datos de las alturas y los diámetros de los pies de cada una de las 24 parcelas inventariadas. Los estimadores obtenidos en el ajuste también han servido para obtener las curvas correspondientes a los percentiles del 5 y 95 % de la distribución de alturas.

Posteriormente, y a partir de la ecuación modelizada, se ha construido una función altura-diámetro generalizada, relacionando los parámetros de la función S_{BB} con las principales variables de masa.

PALABRAS CLAVE: Función de densidad bivalente S_{BB}
Relación altura-diámetro generalizada
Pinus pinaster

INTRODUCCIÓN

Una de las principales dificultades a abordar en la modelización forestal es la estimación de la producción en volumen de una determinada masa arbórea, sobre todo cuando se trata de la estimación de los volúmenes de madera que se pueden obtener para los distintos usos industriales, ya que estos volúmenes dependen enormemente de las distribuciones de altura y diámetro existentes en la masa.

Para realizar esta estimación, la metodología más habitual en los modelos con clases de dimensión es ajustar una función de densidad a la distribución de frecuencias diamétri-

* Autor para correspondencia
Recibido: 19-7-00
Aceptado para su publicación: 8-2-01

cas, obtener una relación empírica altura-diámetro para estimar la altura media de cada clase diamétrica y finalmente calcular el volumen para cada una de esas clases mediante el empleo de tarifas de cubicación con clasificación de productos (Clutter y Allison, 1974). Aunque este método proporciona resultados bastante satisfactorios en la mayoría de los casos, no se tiene en cuenta el hecho de que la altura varía considerablemente para un determinado diámetro, especialmente en las masas adultas, que son las más importantes desde el punto de vista comercial. Por tanto, es mucho más realista asumir una distribución de alturas dentro de una determinada clase diamétrica, es decir, la alternativa al método anterior es ajustar una distribución bivalente de alturas y diámetros, que estime directamente las frecuencias (número de pies) por cada combinación de clase diamétrica y de altura que puede encontrarse dentro de la masa.

En este artículo se analiza el empleo de la función de densidad bivalente de Johnson (S_{BB}) (Johnson, 1949a) para modelizar la distribución altura-diámetro de *P. pinaster* en Galicia. Esta función ha sido empleada con buenos resultados para caracterizar distribuciones bivariantes por diversos autores (Schreuder y Hafley, 1977; Knoebel y Burkhart, 1991; Tewari y Gadaw, 1997, 1999; Schmidt y Gadaw, 1999).

Se muestra también una aplicación de sus propiedades más interesantes como es la modelización de la curva de alturas de una masa (relación altura-diámetro) mediante el ajuste por regresión de medianas de la función bivalente S_{BB} . Posteriormente, además, se ha obtenido una ecuación altura-diámetro generalizada para *P. pinaster* en Galicia mediante el ajuste de relaciones entre los parámetros de la función S_{BB} y las principales variables de masa.

Esta metodología podría servir como base para lograr un mayor desarrollo del modelo de crecimiento y producción que para la especie ya existe en Galicia (Rodríguez Soalleiro *et al.*, 1994), al incorporar al mismo una nueva herramienta, la distribución de los pies por clases diamétricas y de altura, proporcionando a los gestores de las masas una mayor información que facilite la toma de decisiones.

MATERIAL Y MÉTODOS

La función de densidad de probabilidad bivalente S_{BB}

La distribución S_{BB} es una función de densidad bivalente que cumple que las dos distribuciones marginales¹ son funciones de densidad univariantes S_B (Johnson, 1949a; Johnson y Kotz, 1972), es decir, la probabilidad de que la variable «X» tome un cierto valor «x» se expresa como:

¹ Dada una función de densidad bivalente $f_{X,Y}(x,y)$, las distribuciones de las variables X e Y, $f_X(x)$ y $f_Y(y)$, se denominan funciones de densidad marginales. Aunque las funciones de densidad marginales pueden obtenerse a partir de la función bivalente, en general, no es posible realizar la operación inversa. En el caso de variables discretas la función de densidad marginal $f_X(x)$ se obtiene fijando un valor de la variable X y sumando las densidades obtenidas en la función bivalente $f_{X,Y}(x,y)$ al ir cambiando el valor de Y. Si las variables son continuas la función $f_X(x)$ se obtiene fijando un valor de X e integrando la función bivalente entre los valores extremos de Y. (Dougherty, 1990).

$$f(x) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{(x-\varepsilon)(\varepsilon+\lambda-x)} e^{-\frac{1}{2} \left[\gamma + \delta \ln \left(\frac{x-\varepsilon}{\varepsilon+\lambda-x} \right) \right]^2} \quad [1]$$

$$\varepsilon < x < \varepsilon + \lambda; \delta > 0; -\infty < \gamma < \infty; \lambda > 0; -\infty < \varepsilon < \infty$$

siendo $\gamma + \delta \ln \left(\frac{x-\varepsilon}{\varepsilon+\lambda-x} \right) \sim N(0,1)$; « ε » y « λ » son el valor mínimo y el recorrido de la variable « X » respectivamente y « γ » y « δ » son parámetros de forma.

La función de densidad bivalente S_{BB} (Johnson, 1949b) permite estimar la probabilidad de que dos variables « X_1 » y « X_2 » tomen simultáneamente los valores « x_1 » y « x_2 » mediante el empleo de dos variables normales estandarizadas « Z_1 » y « Z_2 » definidas como:

$$Z_1 = \gamma_1 + \delta_1 \ln \left(\frac{X_1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \lambda_1 - X_1} \right) \quad Z_2 + \delta_2 \ln \left(\frac{X_2 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \lambda_2 - X_2} \right) \quad [2]$$

De modo que la probabilidad de que las nuevas variables « Z_1 » y « Z_2 », con un coeficiente de correlación « ρ », tomen simultáneamente los valores « z_1 » y « z_2 » viene dada por la siguiente expresión:

$$f(z_1, z_2, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2}{1-\rho^2}} \quad [3]$$

En el caso que nos ocupa, la variable « X_1 » es el diámetro normal (d) y la variable « X_2 » es la altura total del árbol (h). Muchas de las propiedades de esta función de densidad bivalente se deben a su estrecha relación con función de densidad bivalente normal. Una de estas propiedades, de gran interés en el campo forestal, es la estimación de la relación de dependencia de la variable « X_2 » (altura) frente a « X_1 » (diámetro). Dicha relación se puede obtener a partir de los valores medios de la variable « X_2 » para cada valor de « X_1 », sin embargo este procedimiento es bastante complejo y se sustituyen los valores medios por las medianas de la variable « X_2 » para cada valor de « X_1 ».

La mediana de « X_2 » (« x_{2m} ») para un valor concreto de « X_1 » (« x_1 ») satisface la siguiente relación:

$$\gamma_2 + \delta_2 \ln \left(\frac{x_{2m} - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \lambda_2 - x_{2m}} \right) = \rho \left[\gamma_1 + \delta_1 \ln \left(\frac{x_1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \lambda_1 - x_1} \right) \right] \quad [4]$$

De donde:

$$e^{\ln \left(\frac{x_{2m} - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \lambda_2 - x_{2m}} \right)} = e^{\frac{\rho\gamma_1 - \rho\gamma_2}{\delta_2}} \cdot e^{\frac{\rho\delta_1}{\delta_2} \ln \left(\frac{x_1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \lambda_1 - x_1} \right)} \quad [5]$$

Si $\theta = \varepsilon \frac{\rho\gamma_1 - \gamma_2}{\delta_2}$ y $\phi = \frac{\rho\delta_1}{\delta_2}$, entonces la ecuación [5] se puede expresar del siguiente modo:

$$\frac{x_{2m} - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \lambda_2 - x_{2m}} = \theta \left(\frac{x_1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \lambda_1 - x_1} \right)^\phi \quad [6]$$

Despejando el valor de « x_{2m} » y rescribiendo la ecuación anterior en términos de alturas y diámetros, se obtiene la siguiente relación entre las dos variables:

$$\frac{h - \varepsilon_2}{\lambda_2} = \theta \left[\left(\frac{\varepsilon_1 + \lambda_1 - d}{d - \varepsilon_1} \right)^\phi + \theta \right]^{-1} \quad [7]$$

Donde « ε_1 » y « ε_2 » son los valores mínimos de diámetros y alturas respectivamente y « λ_1 » y « λ_2 » son los recorridos de dichas variables. La forma de la curva altura-diámetro obtenida está influenciada por el valor del parámetro « ϕ » y la pendiente por el valor de « θ ». Es importante destacar que ambos parámetros dependen única y exclusivamente de las distribuciones marginales de alturas y diámetros.

Otra propiedad de interés de la función de densidad S_{BB} de Johnson es que fijado un valor de la variable « X_1 » (« x_1 »), o lo que es lo mismo, de la variable normal estandarizada « Z_1 » (« z_1 »), la variable « Z_2 » se distribuye según una normal de media ρz_1 y desviación típica $\sqrt{1 - \rho^2}$ es decir:

$$Z_2 = \gamma_2 + \delta_2 \ln \left(\frac{X_2 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \lambda_2 - X_2} \right) \sim N \left(\rho \left[\gamma_1 + \delta_1 \ln \left(\frac{x_1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \lambda_1 - x_1} \right) \right], \sqrt{1 - \rho^2} \right) \quad [8]$$

Esta propiedad permite obtener cualquier α -percentil de la función de densidad S_{BB} , y por tanto, siguiendo la misma metodología descrita anteriormente para estimar la relación altura-diámetro, se pueden obtener curvas α -percentil para dicha relación. Esas curvas se expresan de la siguiente manera:

$$\frac{h - \varepsilon_2}{\lambda_2} = \psi (1 + \psi)^{-1} \quad [9]$$

Donde $\psi = \theta \left(\frac{d - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \lambda_1 - d} \right)^\phi e^{z_\alpha \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\delta_2}}$ y « z_α » es el valor que corresponde, en la distribución $N(0,1)$, a una probabilidad igual a « α ».

Ajuste de la distribución S_{BB}

Para ajustar la distribución S_{BB} , se deben estimar primeramente los parámetros de las dos funciones de densidad marginales S_B de alturas y diámetros (« ε », « λ », « γ » y « δ »);

posteriormente se obtienen las variables normales estandarizadas « Z_1 » y « Z_2 » y finalmente se calcula el coeficiente de correlación (« ρ ») existente entre ambas (Johnson, 1949b). La distribución S_B no tiene una solución única de estimadores de máxima verosimilitud para los cuatro parámetros conjuntamente (« ε », « λ », « γ » y « δ ») y requiere de procedimientos iterativos para su estimación. Sin embargo, si los valores de « ε » y « λ » se suponen conocidos, existe una única solución de los estimadores de máxima verosimilitud, denominados estimadores condicionados.

No siempre es fácil fijar *a priori* valores para « ε » y « λ », sin embargo, en el caso de las variables que nos ocupan (alturas y diámetros), los valores mínimos pueden asumirse como 1,30 metros y 0 cm respectivamente, obligando de este modo a que la curva altura-diámetro pase por dicho punto. Por otra parte, es imprescindible, de acuerdo con las restricciones de la ecuación [1], que « $\varepsilon + \lambda$ » sea mayor que cualquiera de los valores de alturas o de diámetros de la muestra.

Fijados « ε » y « λ », los estimadores condicionados de máxima verosimilitud de los parámetros « δ_i » y « γ_i » se obtienen de la siguiente manera:

$$\delta_i = \frac{1}{s_i} \quad \gamma_i = \frac{-f_i}{s_i} \quad [10]$$

con $f_i = \sum_{j=1}^n \frac{f_{ij}}{n}$; $s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (f_{ij} - f_i)^2}{n}$ y $f_{ij} = \ln \left(\frac{x_i - \varepsilon_i}{\varepsilon_i + \lambda_i - x_i} \right)$; $i = 1,2$ siendo « x_1 » los valores de los diámetros y « x_2 » los de las alturas.

Datos de partida

La función S_{BB} se ha ajustado a los datos del inventario de 24 parcelas instaladas en masas regulares de *P. pinaster* distribuidas por toda la geografía de Galicia. Todas ellas pertenecen a las 4 primeras calidades definidas por Bará y Toval (1983) y su edad oscila entre los 4 y los 15 años. La dimensión de las parcelas varía entre los 440 y los 900 m² y el número de pies por parcela entre 30 y 135.

En las parcelas se midió con forcípula el diámetro normal en cruz de todos los árboles con aproximación al mm. La medición de las alturas se realizó con pértiga telescópica aproximando al cm, y, al igual que en los diámetros, se midió la altura en la totalidad de los árboles pertenecientes a la parcela.

A partir de los datos anteriores, se determinaron las siguientes variables de masa para cada parcela: altura media (\bar{h}), diámetro medio (\bar{d}), densidad (N^o pies/parcela y N^o pies/ha), altura dominante (H_0), considerando el criterio de la altura media de los 100 pies más gruesos por hectárea y diámetro medio cuadrático (d_g). En la Tabla 1 se presentan los valores medios, máximos, mínimos, así como las desviaciones típicas de las variables de masa anteriores para el total de las 24 parcelas.

En el ajuste de las distribuciones bivariantes se han considerado unos tamaños de clase de 2 cm para los diámetros y 1 metro para las alturas; como valores mínimos de la distribución, « ε_1 » y « ε_2 », se han empleado 0 cm y 1,30 metros respectivamente con el fin de obligar al modelo a pasar por el punto 0 centímetros de diámetro a 1,30 metros de altura,

Tabla 1
Características de los principales parámetros de masa de la muestra

Variable	Media	Desv. típica	Máximo	Mínimo
\bar{h} (m)	7,6231	2,9977	14,0970	3,6050
\bar{d} (mm)	115,5893	43,4817	201,4760	49,2340
d_g (mm)	119,3428	43,8725	207,2440	51,5870
H_0 (m)	8,9304	2,9385	15,5500	4,5500
Nº pies/parcela	79	26	135	30
Nº pies/ha	1.481	508	2.644	536

y, por último, como valores de los recorridos, « λ_1 » y « λ_2 », se han utilizado los extremos superiores de la clase diamétrica y de altura mayor.

A partir de los datos del ajuste de la función S_{BB} se ha obtenido para cada parcela la relación altura-diámetro y las curvas correspondientes a los percentiles del 5 y 95 %. Además, y con el propósito de analizar la exactitud de las curvas de alturas, se han ajustado a cada parcela otras dos relaciones altura-diámetro de uso habitual en el campo forestal (Schreuder y Hafley, 1977; Tewari y Gadow, 1999; Cañadas *et al.*, 1999) cuyas expresiones son las siguientes:

$$\text{Modelo 1: } h = 1,3 + \left[\frac{d^2}{a + bd + cd^2} \right] \quad [11]$$

$$\text{Modelo 2: } h = 1,3 + e^{\left(a + \frac{b}{d}\right)} \quad [12]$$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la Tabla 2 se presenta el valor medio, máximo, mínimo, así como la desviación típica de los parámetros obtenidos al ajustar la distribución bivalente S_{BB} a cada una de las 24 parcelas inventariadas.

Para comprobar la bondad de los ajustes se ha realizado el test de Kolmogorov-Smirnov con un nivel de significación (α) del 5 % y en todos los casos se ha rechazado la hipótesis nula de que la distribución observada y la predicha pertenecen a una misma población.

Estos malos resultados se deben al escaso número de árboles existentes en las parcelas, lo que limita las combinaciones de clases diamétricas y de alturas y condiciona el ajuste, tal y como se ha descrito en trabajos similares (Schreuder y Hafley, 1977; Schmidt y Gadow, 1999).

Para comprobar la influencia del tamaño de la muestra sobre la bondad del ajuste se ha estimado la función bivalente S_{BB} correspondiente al total de los pies de las 24 parcelas (1.901 árboles) utilizando los mismos tamaños de clase (2 cm y 1 m), valores mí-

nimos (0 cm y 1,30 m) y recorridos. Las Figuras 1a y 1b representan las distribuciones observada y predicha y la Tabla 3 muestra un resumen de dichas frecuencias. En este caso, el resultado del test de Kolmogorov-Smirnov con el mismo nivel de significación confirma que ambas distribuciones forman parte de una misma población. Sin embargo, tanto en la tabla como en las figuras anteriores se aprecia que para las combinaciones extremas de diámetro y altura, las frecuencias observadas difieren considerablemente de las predichas. La explicación a esta discrepancia puede deberse al hecho de que las 24 parcelas de la muestra presentan bastante heterogeneidad en cuanto a edades y densidades, por lo que la superficie a modelizar por la función bivalente es sumamente irregular (ver Figura 1a).

Tabla 2

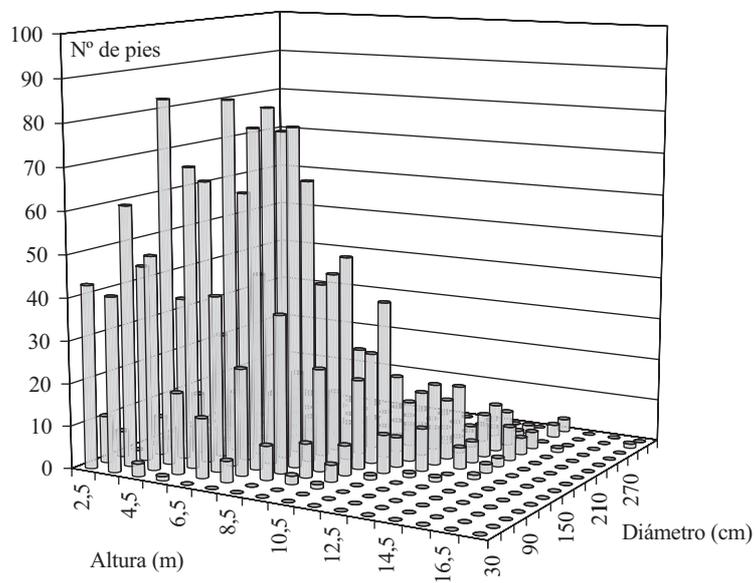
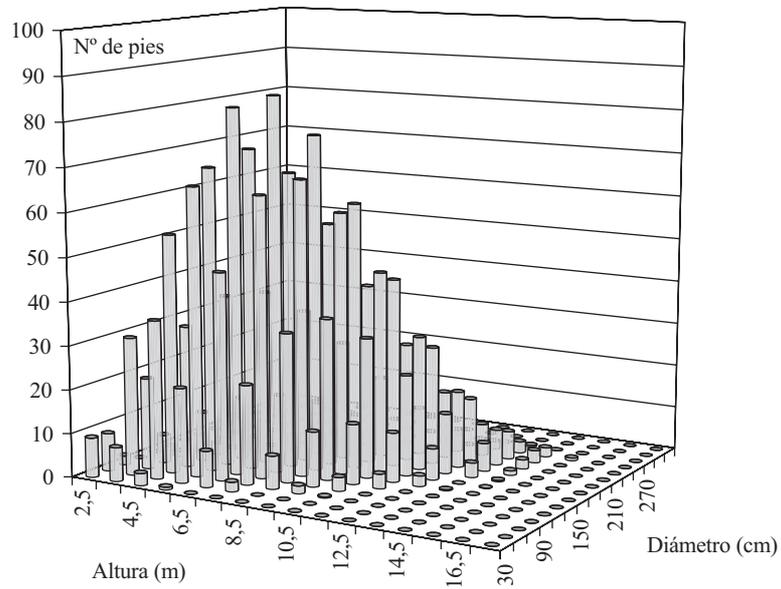
Valores promedio de los parámetros obtenidos en el ajuste de la función S_{BB}

Parámetro	Media	Desv. típica	Máximo	Mínimo
λ_1	197,5000	59,0689	320,0000	100,0000
λ_2	10,1250	3,0831	18,0000	6,0000
γ_1	-0,4978	0,4936	0,3612	-1,5342
γ_2	-1,1573	1,3851	1,1393	-3,3311
δ_1	1,3853	0,1690	1,6707	1,0293
δ_2	2,3480	0,5375	3,5603	1,4935
ρ	0,7471	0,0939	0,9302	0,6020
ϕ	0,4656	0,1441	0,7602	0,2852
θ	1,4775	0,6209	2,4478	0,4994
ε_1	0	0	0	0
ε_2	1,3	0	1,3	1,3
$\Psi_{(5\%)}$	0,3191	0,1896	1,8338	0,0455
$\Psi_{(95\%)}$	9,7392	6,4238	48,9976	0,7196

Tabla 3

Frecuencias observadas y predichas para clases de altura y diámetro para el total de los datos

Clases de altura (m)	Clases diamétricas (mm)									
	20-80		80-140		140-200		200-260		260-320	
	Obs.	Pred.	Obs.	Pred.	Obs.	Pred.	Obs.	Pred.	Obs.	Pred.
2-5	0,1348	0,0911	0,0363	0,0284	0	0	0	0	0	0
5-8	0,0921	0,0885	0,2835	0,2814	0,0252	0,0373	0	0	0	0
8-11	0,0058	0,0051	0,1531	0,1762	0,1661	0,1721	0,0082	0,0056	0	0
11-14	0	0	0,0063	0,0091	0,0442	0,0679	0,0427	0,0314	0,0032	0,0003
14-17	0	0	0	0	0,0026	0,0008	0,0080	0,0047	0,0032	0,0001
17-20	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0005	0



Figs. 1a y 1b.—Distribución observada y predicha de diámetros y alturas para el total de los pies de la muestra.

Posteriormente se han estimado las relaciones altura-diámetro de cada parcela derivadas de la función S_{BB} (ecuación [7]) y se han ajustado por mínimos cuadrados ordinarios las dos ecuaciones que, como ya se ha comentado anteriormente, son de uso frecuente en la modelización de dicha relación (ecuaciones [11] y [12]). La comparación entre los tres modelos se ha basado en los valores del sesgo (\bar{E}), error medio cuadrático (EMC), y error medio en valor absoluto ($|\bar{E}|$) cuyas expresiones son:

$$\text{Sesgo: } \bar{E} = \frac{\sum_{i=1}^N E_i}{N} \quad [13]$$

$$\text{Error medio cuadrático: } EMC = \frac{\sum_{i=1}^N (E_i)^2}{N-q-1} \quad [14]$$

$$\text{Error medio en valor absoluto: } |\bar{E}| = \frac{\sum_{i=1}^N |E_i|}{N} \quad [15]$$

Siendo «N» el número de datos usados en el ajuste; «q» el número de variables del modelo y « E_i » la diferencia entre el valor observado y el valor predicho de la altura.

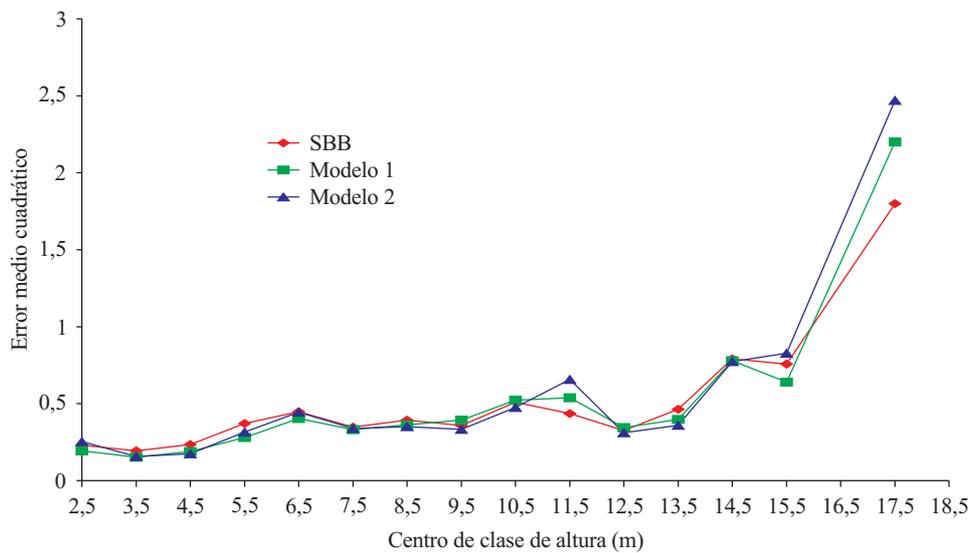
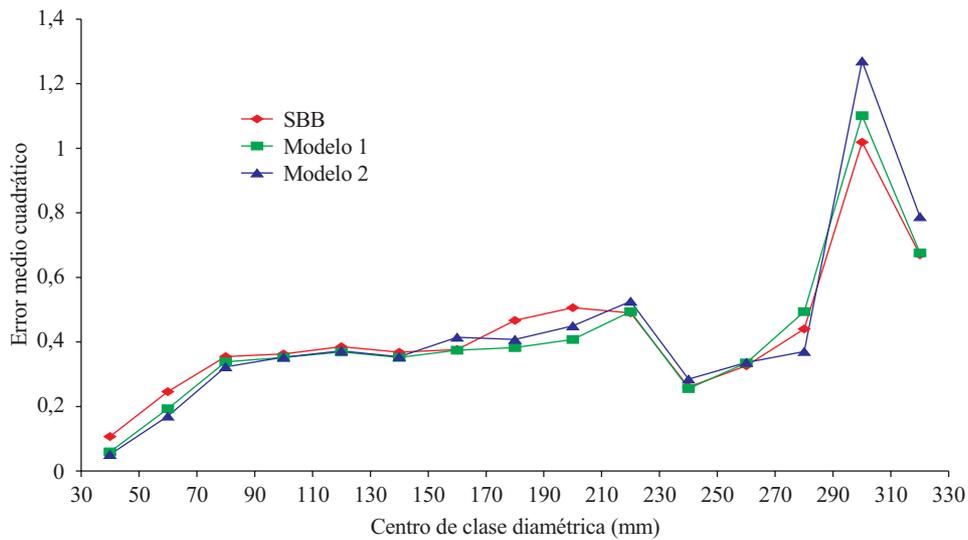
En la Tabla 4 se exponen los valores medios de los parámetros estimados para los modelos ajustados por mínimos cuadrados, los estimadores condicionados de máxima verosimilitud de la función S_{BB} y los valores de los estadísticos de comparación.

Tabla 4
Valores de los parámetros estimados y estadísticos de comparación para los modelos altura-diámetro analizados

Modelo	Valor promedio de los parámetros	Sesgo	Error medio cuadrático	Error medio absoluto
Modelo 1				
$h = 1,3 + \left[\frac{d^2}{a + bd + cd^2} \right]$	a = 0* b = 10,6149 c = 0,0794	0,06012	0,57686	0,43802
Modelo 2				
$h = 1,3 + e^{\left(\frac{a+b}{d}\right)}$	a = 2,1786 b = -43,8433	0,03364	0,58038	0,43958
S_{BB}				
$h = 1,3 + \lambda_2 \theta \left[\left(\frac{\lambda_1 - d}{d} \right)^\phi + \theta \right]^{-1}$	$\lambda_1 = 197,5000$ $\lambda_2 = 10,1250$ $\theta = 1,4775$ $\phi = 0,4656$	0,01204	0,59957	0,45817

* En ninguna de las 24 parcelas se pudo rechazar la hipótesis nula de que el parámetro «a» fuese igual a cero.

Tal como se aprecia en la tabla anterior, la ecuación derivada del ajuste de la función S_{BB} estima las alturas con mucho menor sesgo que las ajustadas por mínimos cuadrados. Los valores del error medio cuadrático y error medio en valor absoluto son muy similares para los tres ajustes, aunque algo superiores en el modelo derivado de la función S_{BB} . Sin embargo, si se analizan los resultados por clases diamétricas y de alturas (Figuras 2 y 3),



Figs. 2 y 3.—Tendencia del error medio cuadrático por clases diamétricas y de alturas

se aprecia que el error medio cuadrático de este último modelo es inferior al de los dos restantes en las clases superiores, tanto de diámetros como de alturas, que son las más importantes desde el punto de vista de producción en volumen. Estos resultados indican una mayor exactitud y precisión de la relación altura-diámetro derivada de la función S_{BB} para los datos analizados.

Finalmente se han relacionado los parámetros de la función S_{BB} de Johnson con las principales variables de masa con el propósito de obtener una relación altura-diámetro generalizada. Los recorridos, « λ_1 » y « λ_2 », están fuertemente correlacionados con el diámetro medio cuadrático y la altura dominante respectivamente. Las ecuaciones que relacionan los parámetros « ϕ » y « θ » con las variables de masa se han obtenido mediante un ajuste por mínimos cuadrados «STEPWISE» (SAS, 1990), imponiendo la condición de maximizar el valor del coeficiente de determinación (R^2). Las relaciones finalmente obtenidas son las siguientes:

$$h = 1,3 + \lambda_2 \theta \left(\left[\frac{\lambda_1 - d}{d} \right]^\phi + \theta \right)^{-1} \quad [16]$$

Siendo:

$$\lambda_1 = 43,103 + 1,2937 d_g \quad [17]$$

$$\lambda_2 = 1,116 + 1,0175 H_0 \quad [18]$$

$$\theta = 0,0804166 H_0^{1,321009} \quad [19]$$

$$\phi = e^{(-0,615060 + 0,116153\bar{d} - 0,121602d_g)} \quad [20]$$

En la Tabla 5 se presentan los valores de las estimaciones de los parámetros, junto al coeficiente de determinación (R^2) y el valor del error medio cuadrático para cada una de las relaciones anteriores.

Tabla 5
Valores medios de los parámetros y estadísticos obtenidos en la modelización de la función S_{BB} generalizada

Modelo	Estimación de los parámetros			R^2	EMC
	a	b	c		
$\lambda_1 = a + b d_g$	43,10327	1,29372	–	0,9233	279,71197
$\lambda_2 = a + b H_0$	1,11600	1,01754	–	0,9715	0,28291
$\theta = a H_0^b$	–2,52053	1,32101	–	0,8355	0,03940
$\phi = e^{(a + b d_g + c \bar{d})}$	–0,61506	0,11615	–0,12160	0,6417	0,03612

Con el propósito de analizar la validez de este modelo, se ha ajustado al conjunto total de datos la relación altura-diámetro generalizada propuesta por Pienaar (1991) ya empleada con buenos resultados para *Pinus pinaster* en Pontevedra (Schröder y Álvarez González, 2001), cuya expresión es la siguiente:

$$h = \alpha_1 H_0 \left(1 - \alpha_2 e^{\frac{\beta d}{d_g}} \right)^{\alpha_3} \quad [21]$$

En el ajuste de la ecuación [21] a los datos de las 24 parcelas se observó que la estimación del parámetro « α_2 » era muy cercana a uno, aunque presentaba un error asintótico estándar muy elevado, por lo que se decidió modificar el modelo inicial prescindiendo de dicho parámetro. Los valores de los parámetros obtenidos en el ajuste definitivo, su coeficiente de determinación y su error medio cuadrático son los siguientes:

$$h = 1,0538 H_0 \left(1 - e^{\frac{-1,7561 d}{d_g}} \right)^{0,9142} \quad R^2 = 0,8947 \quad EMC = 0,9067 \quad [22]$$

Para determinar el comportamiento del modelo generalizado derivado de la función S_{BB} calculó el valor del sesgo (\bar{E}) en altura para clases diamétricas de 2 cm, tanto de las dos funciones generalizadas, como de las tres ajustadas anteriormente a cada parcela. En la Figura 4 se muestra la tendencia del sesgo para cada una de las relaciones estudiadas.

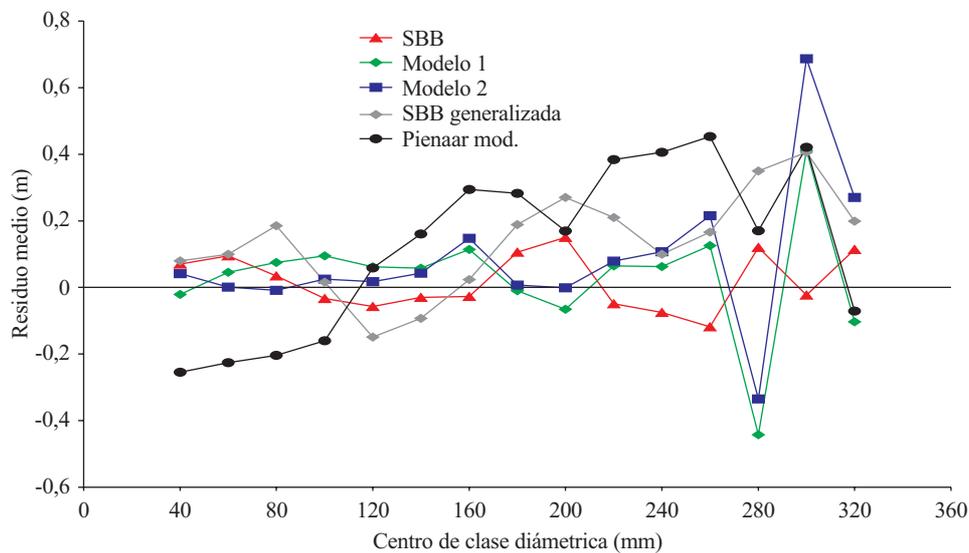


Fig. 4.—Tendencia del sesgo (\bar{E}) en la estimación de las alturas para los 5 modelos altura-diámetro analizados

Se puede apreciar cómo el modelo derivado de la función S_{BB} es el que presenta un menor sesgo para el conjunto de todas las clases diamétricas. Los dos modelos «estándar» presentan bastante buenas estimaciones de altura para diámetros pequeños (si bien poseen una ligera tendencia a la subestimación), sin embargo, cuando éstos aumentan, los sesgos son muy elevados. Las funciones generalizadas (tanto la derivada de la función S_{BB} como el modelo de Pienaar modificado) muestran un marcado sesgo negativo, lo que indica una tendencia a subestimar las alturas de los árboles, sin embargo debe tenerse en cuenta que se trata de ecuaciones empleadas para el conjunto de las 24 parcelas, mientras que los otros tres modelos se han ajustado de forma independiente a cada parcela, por lo que es lógico que la relación altura-diámetro generalizada tenga un sesgo superior. Cabe destacar que los sesgos son más elevados en el modelo de Pienaar modificado que en la función S_{BB} generalizada.

Para comparar la capacidad predictiva de las 2 ecuaciones altura-diámetro generalizadas ajustadas se ha calculado, además, el sesgo (\bar{E}) y el error medio cuadrático (EMC) a partir de los residuos predichos (residuos estimados independientemente de los datos utilizados en el ajuste). Los resultados arrojaron unos valores muy similares en ambos modelos: un sesgo algo superior en el caso de la función de Pienaar modificada ($-0,08468$ frente a $0,03349$ de la función S_{BB} generalizada), aunque un error medio cuadrático inferior ($0,86267$ frente a $0,97220$ de la función S_{BB} generalizada).

Finalmente, en la Figura 5, se representan gráficamente las curvas altura-diámetro correspondientes a los 5 modelos analizados para una de las 24 parcelas de la muestra; junto a ellas se muestran las curvas correspondientes a los percentiles del 5 y del 95 % obteni-

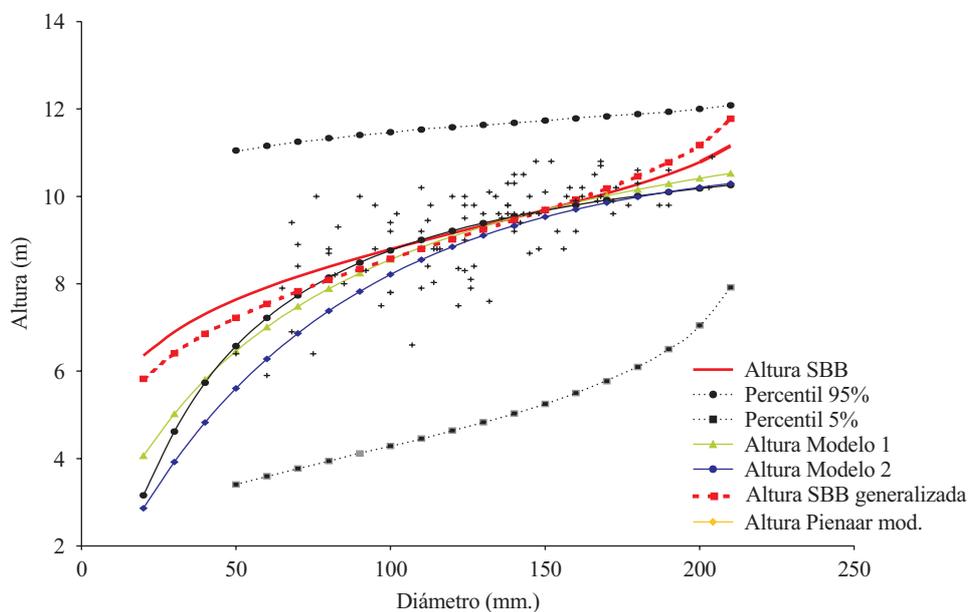


Fig. 5.—Representación gráfica de las curvas correspondientes a los modelos altura-diámetro probados y a los percentiles del 5 y 95 % para una de las parcelas de la muestra

das de sustituir los estimadores de máxima verosimilitud en la ecuación [9]. Estas curvas parecen corroborar lo que ya se advertía en la Figura 4: tanto los modelos «estándar» como los generalizados tienden a subestimar las alturas, sobre todo para valores pequeños de diámetro, mientras que el modelo derivado de la función S_{BB} es el que mejor se ajusta al conjunto de los datos.

La tendencia a estrecharse en los extremos de las curvas correspondientes a los percentiles del 5 y 95 % de la distribución de alturas viene a respaldar la hipótesis de que en masas regulares de coníferas los árboles dominantes y los dominados se asocian con los diámetros más gruesos y delgados respectivamente, sin embargo, los diámetros medios de la masa (los correspondientes a pies codominantes e intermedios) son los que presentan mayor variación en altura (Schreuder y Hafley, 1977; Tewari y Gadow, 1997,1999).

CONCLUSIONES

El ajuste de la función de densidad bivalente S_{BB} a datos de alturas y diámetros de *Pinus pinaster* ha confirmado la gran influencia que el tamaño de la muestra tiene sobre la bondad del ajuste de dicha función, como ya habían descrito otros autores en trabajos similares, lo que dificulta enormemente su empleo al implicar la medición de un gran número de alturas. Una posible alternativa sería utilizar datos procedentes de parcelas de inventario en las que se midiesen todos los diámetros y una muestra representativa de alturas, aunque previamente deberían compararse las estimaciones de dicha función obtenidas a partir de muestras completas e incompletas de alturas.

La función bivalente S_{BB} permite, además, mediante ajuste por regresión de medianas, modelizar la relación altura-diámetro, obteniéndose, en el caso de pino pinaster en Galicia, una mayor exactitud que la mostrada por algunos de los modelos más comúnmente utilizados para expresar dicha relación.

Esta característica, unida al hecho de que los parámetros de la curva de alturas de masa obtenida mediante la función S_{BB} presentan una buena correlación con algunas variables de masa, permite que se pueda estimar un modelo de altura-diámetro generalizado. Este modelo es de sencilla utilización y es capaz de estimar las alturas con sesgos relativamente bajos, incluso inferiores a modelos generalizados habituales en este tipo de ajustes.

SUMMARY

Modelling the diameter-height relationship for *Pinus pinaster* Ait. in Galicia using S_{BB} distribution

The bivariate density function S_{BB} has been fitted to height and diameter data of maritime pine (*Pinus pinaster* Ait.) from 24 sample plots established in even-aged stands of this specie in Galicia (Northwestern Spain).

The height-diameter model in maritime pine was estimated using a property of the S_{BB} bivariate distribution. In order to get this, a median regression of S_{BB} function was established between heights and diameters data of each one of the 24 sample plots. The estimated values obtained in the fit has also been used to obtain the curves corresponding to the percentiles of the 5 and 95 % of the height distribution.

Finally, a generalized height-diameter function has been developed for *Pinus pinaster* in Galicia from the equations fitted to each plot, relating the S_{BB} function with the principal stand variables.

KEY WORDS: Bivariate S_{BB} distribution
Generalized diameter-height relationship
Pinus pinaster

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARÁ TEMES S., TOVAL HERNÁNDEZ G., 1983. Calidad de estación de *Pinus pinaster* Ait. en Galicia. Comunicaciones INIA. Serie Recursos Naturales n.º 24. Madrid. 166 pp.
- CAÑADAS N., GARCÍA C., MONTERO G., 1999. Relación altura-diámetro para *Pinus pinea* L. en el Sistema Central. Actas del Congreso de Ordenación y Gestión Sostenible de Montes. Santiago de Compostela, 4-9 de octubre de 1999 (en prensa).
- CLUTTER J.L., ALLISON B.J., 1974. A growth and yield model for *Pinus radiata* in New Zealand. En: Growth Models for Tree and Stand Simulation. Fries J., ed. Royal college of Forestry, Stockholm, Sweden. Department of Forest Yield Research Note 30, 136-160.
- DOUGHERTY E.R., 1990. Probability and statistics for the engineering, computing and physical sciences. Prentice-Hall.
- JOHNSON N.L., 1949a. Systems of frequency curves generated by methods of translation. *Biometrika* 36, 149-176.
- JOHNSON N.L., 1949b. Bivariate distributions based on simple translation systems. *Biometrika* 36, 297-304.
- JOHNSON N.L., KOTZ S., 1972. Distribution in statistics: Continuous multivariate distributions. Wiley, New York. 333 pp.
- KNOEBEL B.R., BURKHART H.E., 1991. A bivariate distribution approach to modelling forest diameter distributions at two points of time. *Biometrics* 47, 241-253.
- PIENAAR L.V., 1991. PMRC Yield Prediction System for Slash Pine Plantations in the Atlantic Coast Flatwoods. PMRC Technical Report, Athens.
- RODRÍGUEZ SOALLEIRO R., ÁLVAREZ GONZÁLEZ J.G., VEGA ALONSO G., 1994. Piñeiro do país: modelo dinámico de crecemento de masas regulares de *Pinus pinaster* Aiton en Galicia (Guía para o usuario do programa PINASTER). Capacitación e Extensión. Serie Manuais Prácticos n.º 8. Consellería de Agricultura, Gandería e Montes, Xunta de Galicia. 40 pp. Santiago de Compostela.
- SAS/STAT™ (1990). User's guide, Version 6, Fourth Edition. SAS Institute Inc., Cary, NC, USA.
- SCHMIDT V.M., GADOW K.v., 1999. Baumhöhenschätzung mit Hilfe der bivariaten Johnson's S_{BB} - Funktion. *Forstw. Cbl.* 118, 355-367.
- SCHREUDER H.T., HAFLEY W.L., 1977. A useful bivariate distribution for describing stand structure of tree heights and diameters. *Biometrics* 33, 471-478.
- SCHRÖDER J., ÁLVAREZ GONZÁLEZ J.G., 2001. Comparing the performance of generalized diameter-height equations for maritime pine in Northwestern Spain. *Forstwissenschaftliches Centralblatt* 120 (1): 18-23.
- TEWARI V.P., GADOW K.v., 1997. Fitting a bivariate distribution to diameter-height data of forest trees. *Indian Forester* 123, 815-820.
- TEWARI V.P., GADOW K.v., 1999. Modelling the relationship between tree diameters and heights using S_{BB} distribution. *Forest Ecology and Management* 119, 171-176.